



La Teoría de Ramsey

Pablo Fernández Gallardo
Facultad Informática UPM



Imagínate una noche clara y estrellada...

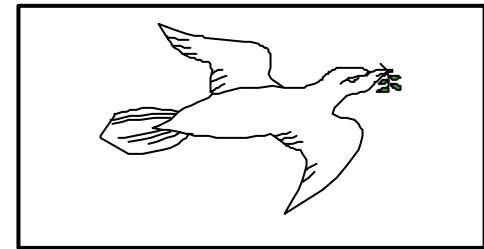
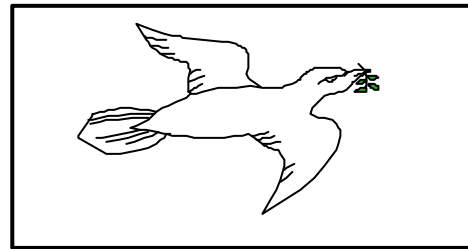
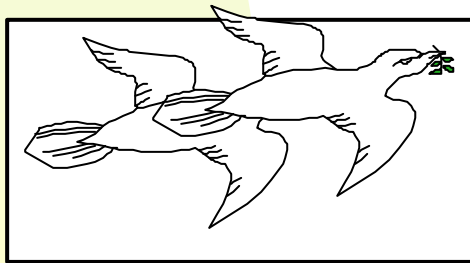
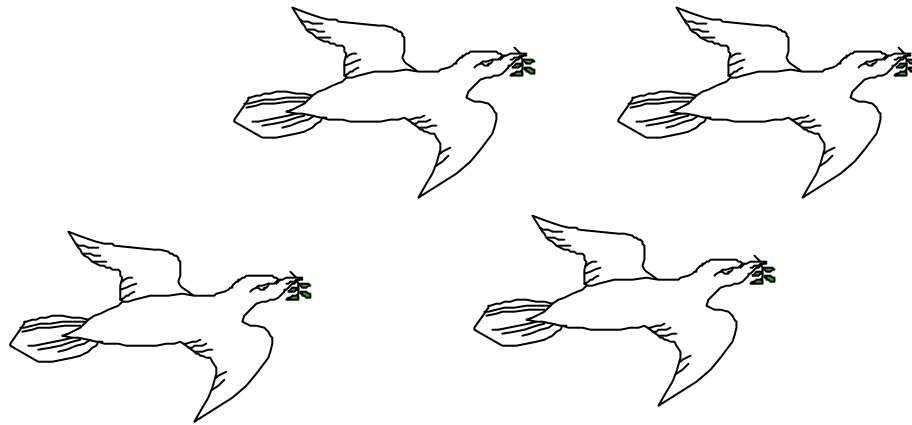
Al principio, las estrellas forman una mancha difusa que llena el horizonte...

Pero, poco a poco, se van distinguiendo una línea recta aquí, un cuadrado allí...

Y si te dejas llevar lo suficiente por tu imaginación, llegarás a ver un león, un escorpión o un oso...

Primer resultado "a la Ramsey"

El principio del palomar





O, en palabras,

si tenemos n nidos y $n+1$ palomas, entonces al menos dos de ellas duermen en el mismo nido.

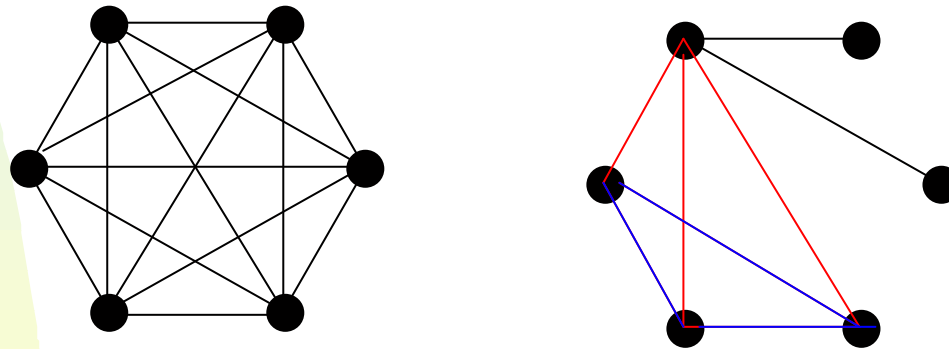
Más generalmente:

si tenemos n nidos y $kn+1$ palomas, entonces al menos $k+1$ de ellas duermen en el mismo nido

Segundo ejemplo

- En cualquier reunión de 6 personas, o bien 3 de ellas se conocen entre sí, o bien 3 de ellas no se conocen entre sí.

Es decir, si coloreamos de rojo y azul las aristas del grafo



o bien tenemos un triángulo rojo
o bien uno azul

El teorema de Ramsey. Los números de Ramsey.

Problema: dados p y q , encontrar el mínimo N que cumpla que si coloreamos las aristas de K_N con dos colores, rojo y azul, podemos encontrar un K_p azul o un K_q rojo.

El mínimo entero con esa propiedad es el **número de Ramsey** $R(p, q; 2)$

El ejemplo anterior (y un ingrediente más) nos dice que
 $R(3, 3; 2) = 6$

Teorema (Ramsey)

Dados p_1, \dots, p_t , existe N tal que si coloreamos K_N con t colores, entonces hay un K_{p_1} del primer color, o bien un K_{p_2} del segundo, etc.

El menor N con esa propiedad es el número de Ramsey
 $R(p_1, \dots, p_t; 2)$

Teorema (Ramsey) II

Dados p_1, \dots, p_t y $r \geq 1$, existe N tal que si un conjunto tiene al menos ese número de elementos y coloreamos sus r -subconjuntos con t colores, entonces hay un p_i -subconjunto con todos sus r -subconjuntos de color i .

El menor N con esa propiedad es el número de Ramsey

$$R(p_1, \dots, p_t; r)$$

El principio del palomar, “a la Ramsey”

$$R(\underbrace{2, \dots, 2}_t ; 1) = t+1$$

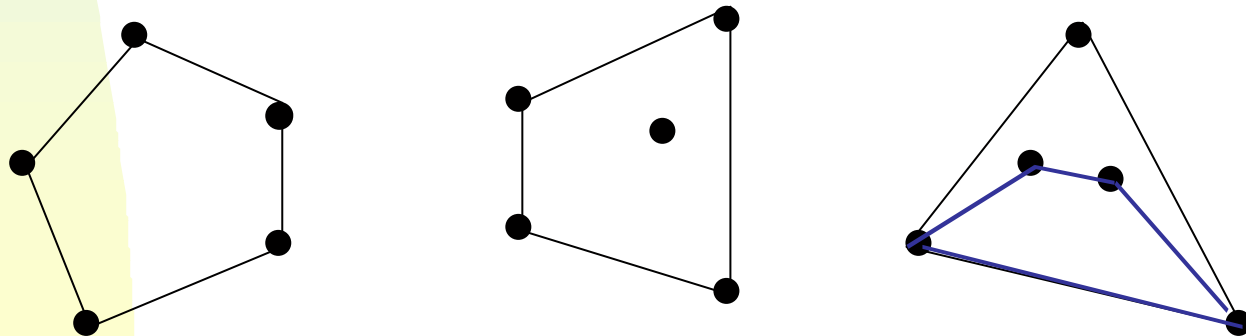
Es decir, coloreamos los **vértices** de un K_{t+1} con t colores distintos y al menos hay dos vértices en uno de los colores.

$$R(\underbrace{r+1, \dots, r+1}_t ; 1) = rt+1$$

Tercer ejemplo (una observación de Esther Klein):

- dados 5 puntos del plano (sin tríos colineales), hay cuatro que forman un cuadrilátero convexo.

La envolvente convexa de 5 puntos en el plano es un polígono de 5, 4 o 3 lados



¿Y el problema general?

- ¿Podemos encontrar, para un n dado, un $N(n)$ de manera que si situamos $N(n)$ puntos en el plano (sin tríos colineales), haya n formando un polígono convexo?

(Hemos visto que $N(4)=5$)

Respuesta: Erdős-Szekeres

$$N(n) \leq R(5, n; 4)$$

Coloreamos los 4-subconjuntos con los colores “convexo” y “no convexo”.

La definición de número de Ramsey nos dice que

- o bien hay 5 puntos cuyos 4-subconjuntos son todos cuadriláteros no convexos,
- o bien hay n cuyos 4-subconjuntos son todos cuadriláteros convexos.

¡Ah!, y un polígono es convexo si sus cuadriláteros lo son.

Por cierto,

$$N(4)=5=2^2+1$$

$$N(5)=9=2^3+1$$

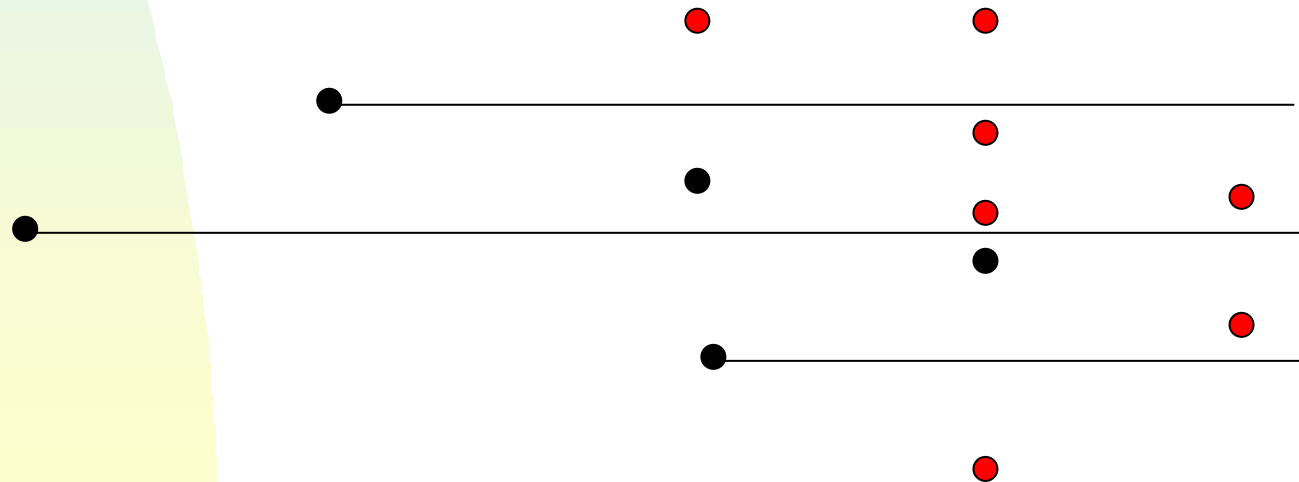


Conjetura:

$$N(n)=2^{n-2}+1$$

Cuarto ejemplo:

- dada una lista ordenada de 5 números reales, al menos 3 de ellos (en el mismo orden) forman una sucesión monótona.

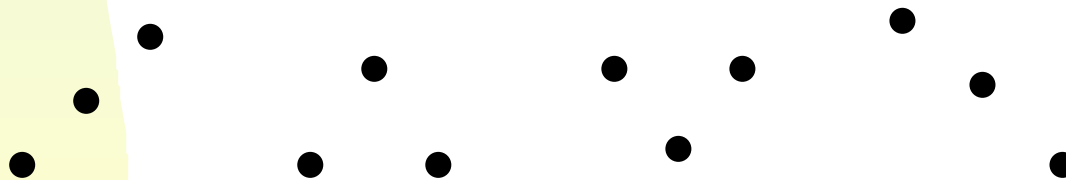


El problema general:

- dado n , encontrar $M(n)$ de manera que cualquier sucesión de $M(n)$ números reales contenga una subsucesión monótona de longitud n

Resultado: $M(n) \geq R(n, n, n, n ; 3)$

Coloreamos los tríos de números con los colores



Un resultado mejor (Erdős y Szekeres, de nuevo):

- dados n^2+1 números reales, $n+1$ de ellos forman una sucesión monótona.

¡Son versiones cuantitativas del teorema de Bolzano!

Quinto ejemplo: ¡Fermat no tenía razón!

(¡ejem!, en Z_p)

Teorema (Schur)

Dado un entero m , podemos encontrar $S(m)$ tal que si p es un primo grande, $p \geq S(m)$, entonces

$$x^m + y^m = z^m$$

tiene solución no trivial en Z_p

Se prueba utilizando el siguiente lema:

Lema

Dado un entero m , podemos encontrar $N(m)$ tal que si $N \geq N(m)$ y coloreamos el conjunto $\{1, \dots, N\}$ con m colores, existirán x, y, z del conjunto con el mismo color y tales que

$$x+y=z$$

Basta comprobar que

$$N(m) = R(3, \dots, 3; 2) - 1$$

¿Se conocen los valores de los números de Ramsey?

Muy pocos. Por ejemplo, para los números del tipo $R(p,q;2)$,

	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	36	40-43
4		18	25	35-41	49-61	53-84	60-115	80-149
5			43-49	58-87	80-143	95-216	114-316	118-442

O, por ejemplo, $R(3,3,3;2)=17$ (éste es fácil)



¿Y cómo son de grandes los números de Ramsey?

Enooooormes



Cotas superiores

$$R(p, q) \leq R(p, q-1) + R(p-1, q)$$

$$R(p, q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}$$

Cotas inferiores

Con el método probabilístico de Erdős
(para $R(p, p; 2)$)

Problema abierto:

Se sabe que

$$\sqrt{2} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} R(k, k)^{1/k} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} R(k, k)^{1/k} \leq \sqrt{4}$$

Pero, ¿existe realmente

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R(k, k)^{1/k} \quad ?$$

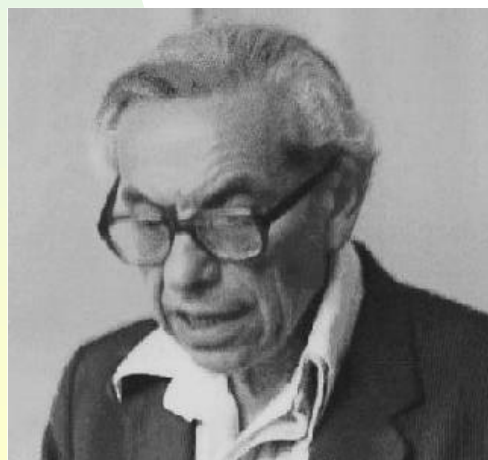
Versiones infinitas:

- **Teorema (Ramsey infinito)** Dado un conjunto A infinito numerable, si coloreamos sus k -subconjuntos con r colores, entonces existe un subconjunto B infinito cuyos k -subconjuntos llevan el mismo color.
- **Corolario (Bolzano)** Toda sucesión infinita de números reales contiene una subsucesión infinita creciente o decreciente.

Un par de resultados sobre progresiones aritméticas:

- **Teorema (van der Waerden):** dados l y r , existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ y coloreamos $\{1, \dots, n\}$ con r colores, entonces hay una progresión aritmética monocromática de longitud l .
- **Teorema (Szemerédi):** si A es un conjunto de enteros positivos de densidad superior positiva, entonces A contiene progresiones aritméticas arbitrariamente largas.

Un poco de historia:



ON A PROBLEM OF FORMAL LOGIC

By F. P. RAMSEY.

[Received 28 November, 1925.—Read 15 December, 1926.]

This paper is primarily concerned with a special case of one of the leading problems of mathematical logic, the problem of finding a regular procedure to determine the truth or falsity of any given logical formula*. But in the course of this investigation it is necessary to use certain theorems on combinations which have an independent interest and are most conveniently set out by themselves beforehand.

I.

The theorems which we actually require concern finite classes only, but we shall begin with a similar theorem about infinite classes which is easier to prove and gives a simple example of the method of argument.

THEOREM A. *Let Γ be an infinite class, and μ and r positive integers; and let all those sub-classes of Γ which have exactly r members, or, as we may say, let all r -combinations of the members of Γ be divided in any manner into μ mutually exclusive classes C_i ($i=1, 2, \dots, \mu$), so that every r -combination is a member of one and only one C_i ; then, assuming the axiom of selections, Γ must contain an infinite sub-class Δ such that all the r -combinations of the members of Δ belong to the same C_i .*

Consider first the case $\mu=2$. (If $\mu=1$ there is nothing to prove.) The theorem is trivial when r is 1, and we prove it for all values of r by induction. Let us assume it, therefore, when $r=\rho-1$ and deduce it for $r=\rho$, there being, since $\mu=2$, only two classes C_i , namely C_1 and C_2 .

* Called in German the *Entscheidungsproblem*; see Hilbert und Ackermann, *Grundzüge der Theoretischen Logik*, 72-81.