EXAMEN de ENTRENAMIENTO

Inducción y recursividad - Grupos GM12 y GM14

- En las preguntas de test, para cada pregunta sólo una de las tres afirmaciones es cierta. Debe responderse a), b) o c) en el recuadro correspondiente o bien dejar el recuadro en blanco.
- Calificación de cada pregunta de test: acierto: +1; fallo: -1/2; blanco: 0.
- Cada definición se puntuará sobre 1 punto.
- Cada ejercicio se puntuará sobre 3 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras ni móviles.
- Tiempo total para el examen: 2h

TEST (20 %)

---

(1) Se define la función

$$F(n) = \begin{cases} F(0) = 1, \\ F(1) = 2, \\ \dfrac{F(n-1)}{F(n-2)}, \text{ si } n \geq 2 \end{cases}$$

Entonces $F(7)$ vale:

a) 1;

b) 2;

c) $\frac{1}{2}$.

---

(2) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir r bolas idénticas en n cajas distintas?

a) $\binom{n-1+r}{r}$.

b) $\binom{n}{r}$.

c) $\binom{n+r}{r}$.

---

(3) Sea $H(n)$ una propiedad que consiste en que la igualdad $a(n) = b(n)$ sea cierta, donde $a(n)$ y $b(n)$ son funciones. Se prueba el paso base para $n = 0$ y este resulta ser cierto. Se ha de probar el paso inductivo como sigue:

a) Se pone la igualdad $a(n+1) = b(n+1)$ y a partir de ella se prueba que $H(n+1)$ es cierta.

b) Se escribe la función $a(n+1)$ o $b(n+1)$ y a partir de ella se prueba que $H(n+1)$ es cierta.

c) Se pone la igualdad $a(n) = b(n)$ y a partir de ella se prueba que $H(n+1)$ es cierta.

---

(4) Se tiene la potencia $\left(x - 1/x\right)^{2k}$, donde k es un entero positivo. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) No existen términos constantes en el desarrollo de esa potencia.

b) Hay más de un término constante que corresponde a distintas potencias de x y $\frac{1}{x}$.

c) Existe un único término constante en las potencias orden k de x y $\frac{1}{x}$.

---

(5) Se define la función recursiva $f : LIST(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{N}$.

$$f(L) = \begin{cases} 1 & \text{si } L = [] \\ a & \text{si LONG}(L) = 1 \\ 2 \cdot \text{CAB}(L) - f(\text{RESTO}(\text{RESTO}(L))) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Si sabemos que $f([4,5,7]) = 2$, entonces a vale:

a) 16;

b) 6;

c) 10.

---

(6) La función f toma una lista L no vacía de números naturales y devuelve el producto de sus elementos. La función recursiva de f es:

a) $f(L) = \begin{cases} \text{CAB}(L) & \text{si LONG}(L) = 1 \\ \text{CAB}(L) \cdot f(\text{RESTO}(L)) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$

b) $f(L) = \begin{cases} \text{CAB}(L) & \text{si LONG}(L) = 1 \\ f(\text{CAB}(L) \cdot \text{RESTO}(L)) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$

c) $f(L) = \begin{cases} \text{CAB}(L) & \text{si LONG}(L) = 1 \\ f\big(\text{CAB}(L)\big) \cdot \text{RESTO}(L) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$

TEORÍA (20 %)

---

(1) Dar *argumentos combinatorios* (no algebraicos) para probar las siguientes propiedades de los números combinatorios (n y k son números naturales con $0 \leq k \leq n$):

(1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

(2) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$;

(2) Definir los conceptos de correspondencia recursiva, función recursiva, árbol de dependencia y la relación que hay entre ellos.

EJERCICIOS (20 %)

Ejercicio 1. Probar por inducción que las funciones $f(n)$ y $g(n)$ definidas sobre los naturales son la misma función.

$$f(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ 6 & \text{si } n = 1 \\ f(n-1) + 6f(n-2) & \text{si } n \geq 1 \end{cases} \quad , \quad g(n) = 2 \cdot 3^n$$

Ejercicio 2. Se considera la función $g(n)$ que toma un número natural y devuelve la lista

$$[[1], [2], 3, [4], 5, 6, 7, [8], \ldots, 2^{n-1} + 1, \ldots, [2^n]]$$

(1) Dar una definición recursiva de $g(n)$.

(2) Evaluar detalladamente $g(4)$ y construir $T_g(4)$.

Ejercicio 3. Un alumno debe responder siete de las diez preguntas de un examen. ¿De cuántas formas puede hacerlo si:

(1) no hay restricciones?

(2) debe contestar a las dos primeras preguntas?

(3) debe responder al menos cuatro de las primeras seis preguntas?

Ejercicio 4. Sea el conjunto de las cadenas de bits de longitud 10.

(1) ¿Cuántas tienen 4 unos exactamente?

(2) ¿Cuántas tienen 4 unos como máximo?

(3) ¿Cuántas tienen 4 unos como mínimo?

(4) ¿Cuántas tienen igual número de ceros que de unos?

Problema 1 (20 %)

Sea la función $f(x) = 2x + 1$. Dar una fórmula para el n-ésimo término de la sucesión

$$f_1 = f(x), f_2 = f(f(x)), f_3 = f(f(f(x))), f_4 = f(f(f(f(x)))), \ldots$$

(1) Dar una fórmula para el n-ésimo término de la sucesión $f_n, n \geq 1$.

(2) Probar por inducción la fórmula que habéis obtenido en el apartado anterior.

Problema 2 (20 %)

Consideremos un entero positivo n y su descomposición $x+y+z = n$ en términos de tres enteros no negativos. Llamemos $F(n)$ al número de dichas descomposiciones. El orden de los sumandos de la descomposición es fijo de modo que la descomposición de 1 en $1+0+0 = 1$ y $0+1+0 = 1$ se consideran distintas.

(1) Calcular $F(0), F(1), F(2)$ y $F(3)$.

(2) Caracterizar $F(n)$ en términos de $F(n-1)$, esto es, dar una definición recursiva de $F(n)$.

(3) Contar el número $F(n)$ de las descomposiciones (usar el apartado anterior).