# Inducción y recursividad

November 11, 2016

**Problema 3.5.3** *Sea $F(n)$ la sucesión de Fibonacci. Probad que* $F(n) > \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$ *para* $n \geq 2$.
**Solución**: Haremos la prueba por inducción. La función de Fibonacci se define como sigue:

$$F\left(n\right)=\begin{cases} F(0)=1, \\ F(1)=1, \\ F(n-1)+F(n-2), \text{ si } n\geq 2 \end{cases}$$

Tomamos el caso base empezando en $n = 2$. $F(2)$ es 2 aplicando la definición de la función. Por otro lado, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2-2}$ es 1. Como $2 > 1$, el caso base está probado.

Para el caso inductivo, usamos la inducción fuerte. Suponemos, pues, que la desigualdad se cumple desde 2 hasta $n$ y la probamos para $n+1$. Si $n \geq 2$, se puede escribir, por la definición de $F(n)$:

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1)$$

Por la hipótesis de inducción, es cierto que

$$F(n) > \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}, \quad F(n-1) > \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-3}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} F(n+1) > \quad & \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-3} = \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-3} \cdot \left(1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ & = \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-3} \cdot \left(\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

Para que la propiedad fuera cierta, debería ocurrir que $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ fuese igual a $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$. Comprobemos que es así:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

como queríamos.

La prueba por inducción está completa.